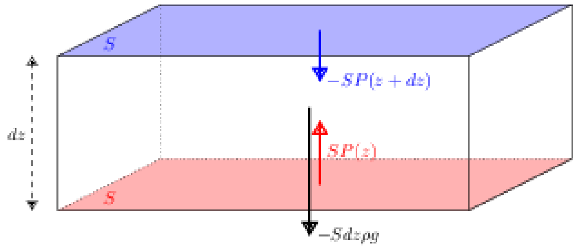
Atmosphère isotherme N°0002



1-) Condition d'équilibre sous forme différentielle

Cette condition d'équilibre traduit **l'équation hydrostatique** en géométrie plan-parallèle. Elle exprime surtout le fait que l'origine physique de la pression au sein de l'atmosphère est le poids de la colonne de gaz située à la verticale.

Soit ***dP*** la différence de pression entre le haut et le bas d'une couche d'épaisseur ***dz*** (**voir figure ci-dessus**). Cette pression dépend de la masse contenue dans un volume de section **S** et d'épaisseur ***dz***, d'où par équilibre des forces verticales s'exerçant sur ce volume on a :

$$\boldsymbol{-SP(z+dz)+SP(z)-(\rho dV)g=0}$$

$$\rightarrow S[-P(z+dz)+P(z)]=(\rho dV)g$$

$$\rightarrow S[-P(z+dz)+P(z)]=\rho gSdz$$

$$\rightarrow -\frac{\partial P}{\partial z}dz=\rho gdz$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\frac{dp}{dz}=-\rho g}\ \ (1)$$

2-) Montrons que cette condition peut se mettre sous la forme : $\frac{d\ln(P)}{dz}=-\frac{Mg}{RT}$

On suppose ici que l'atmosphère est constituée d'un gaz parfait de masse molaire **M**. La forme habituelle du modèle des gaz parfaits est :

$$\boldsymbol{PV = nRT}$$

Or cette écriture n'est pas vraiment adaptée à une formulation locale ou intensive. Il vaut mieux la présenter sous la forme $\boldsymbol{P = \frac{n}{V}RT}$ où l'on voit apparaître la densité molaire (homogène à des mol/m^3, qui peut être considérée comme une grandeur locale). Il serait alors possible d'exprimer la masse volumique du gaz en fonction des conditions de pression et température locales, ainsi que de la masse molaire du gaz constituant l'atmosphère :

$$PV = nRT \to PV = \frac{m}{M}RT = \frac{\rho V}{M}RT$$

$$\to \boldsymbol{\rho = \frac{PM}{RT}} \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1), on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PM}{RT}g \to \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT}dz$$

$$\to d[\ln(P)] = -\frac{Mg}{RT}dz$$

$$\to \boldsymbol{\frac{d[\ln(P)]}{dz} = -\frac{Mg}{RT}} \quad \mathbf{(3)}$$

3-) Calcul de la pression en fonction de l'altitude

On intègre l'équation (3) entre $\mathbf{z_0}$ et $\mathbf{z}$:

$$\int_{P_0}^{P} d[ln(P)] = -\int_{z_0}^{z} \frac{Mg}{RT}dz \to ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{RT}(z - z_0)$$

$$\to \boldsymbol{P = P_0 exp\left[-\frac{Mg}{RT}(z - z_0)\right]} \quad \mathbf{(4)}$$

A une altitude de **z = 4000 m**, on obtient la pression :

$$P_{4000} = 1 \times exp\left[-\frac{29.10^{-3} \times 9,81}{8,315 \times (35 + 273)}(4000 - 0)\right] = 0,641\ bar$$

4-) Hypothèses faites dans cet exercice

- Gaz parfait : acceptable !
- Température uniforme : moins réaliste !
- Uniformité de g : acceptable !

Remarque :

Revenons à l'équation (**4**), que l'on peut mettre sous la forme :

$$P(z) = P_0 exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

L'échelle de hauteur **H** représente donc la hauteur caractéristique avec laquelle la pression décroît avec l'altitude pour tendre vers zéro dans l'espace interplanétaire à grande distance de la planète. Notons que l'approximation plan-parallèle, ainsi que la Thermodynamique usuelle à l'équilibre, cessent d'être valides à quelques dizaines d'échelles de hauteur au-dessus de la surface.

Dans le cas d'une atmosphère non isotherme, la résolution formelle est un peu plus complexe, mais l'idée générale d'une décroissance localement exponentielle selon une échelle de hauteur locale dépendant de la température locale reste valable.