Coefficients thermoélastiques N°0012

1-) Expressions des coefficients thermoélastiques.

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad , \quad \beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad , \quad \chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

2-) Equation d'état de ce gaz réel

On recherche donc ici une équation du style ***F(P, V, T) = 0***.

Petit rappel de l'énoncé :

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{PV} + \frac{a}{VT^2}} \qquad (\mathbf{1})$$

$$\chi_T = \boldsymbol{\frac{RT}{VP^2}} \qquad (\mathbf{2})$$

On considère comme point de départ, l'intégration de $\boldsymbol{\chi_T}$:

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \rightarrow \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{P}}\right)_{\boldsymbol{T}} = -\boldsymbol{V}\chi_T$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -V\frac{RT}{VP^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{P^2}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{V = f(P,T) = \frac{RT}{P} + \varphi(T)} \qquad (3)$$

Pour retrouver $\boldsymbol{\varphi(T)}$, continuons le processus d'intégration en utilisant l'expression de $\boldsymbol{\alpha}$ qui impose que :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{PV} + \frac{a}{VT^2} \rightarrow \left(\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial T}}\right)_{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{P}} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{T^2}}$$

On substitue **V** par son expression dans (**3**) :

$$\rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{P} + \varphi(T)\right)\right]_P = \frac{R}{P} + \frac{a}{T^2}$$

$$\rightarrow \left[\frac{R}{P} + \frac{d\varphi(T)}{dT}\right]_P = \frac{R}{P} + \frac{a}{T^2}$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi(T)}{dT} = \frac{a}{T^2}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\varphi(T) = -\frac{a}{T} + K} \quad (4)$$

D'où l'équation d'état :

$$\boldsymbol{V = \frac{RT}{P} - \frac{a}{T} + K} \quad (5)$$

K est une constante pure. En principe pour les grands volumes ($\boldsymbol{V} \rightarrow +\infty$) et les grandes températures ($\boldsymbol{T} \rightarrow +\infty$)**,** l'équation d'état (**5**) doit se confondre avec celle des gaz parfaits : ***PV* = *RT***. Ce qui impose que ***K* = *0***.

L'équation d'état (**5**) devient alors dans ce cas :

$$\boldsymbol{V = \frac{RT}{P} - \frac{a}{T}}$$