Compression en deux étapes: Travail minimal N°0024

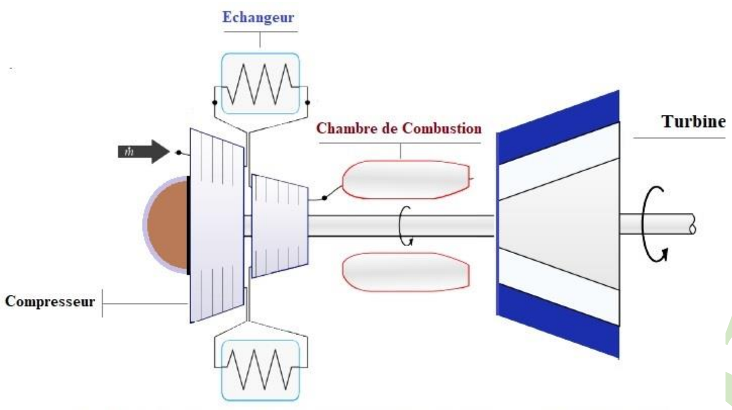
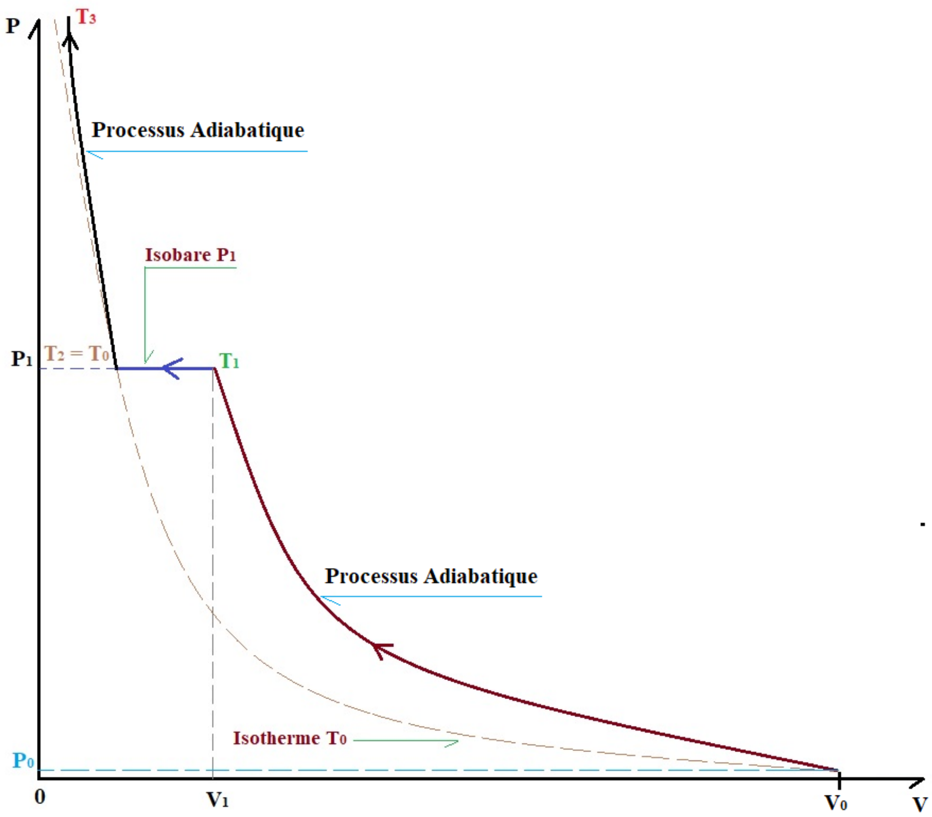


Schéma de principe d'un Turbomoteur Générateur avec Refroidisseur

1-) Représentation de la suite des transformations en coordonnées de **Clapeyron**



- Vous remarquerez que les compressions adiabatiques réversibles (isentropiques) sont plus pentues que si elles étaient isothermes (isotherme en pointillé).
- Lors d'une compression adiabatique, il y a apport de travail ($\Delta W > 0$), le premier principe implique : $\boldsymbol{\Delta U = C_V \Delta T = \Delta W > 0 \rightarrow T_1 > T_0 = T_2}$. Ainsi il y aura nécessairement échauffement (augmentation de température) lors de la transformation adiabatique et refroidissement lors de la transformation isobare).

- Entre les états 0 et 2 on peut écrire :

$$P_1 V_1 = nRT_1 \qquad (1)$$

$$P_2 V_2 = P_1 V_2 = nRT_2 = nRT_0 \qquad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \rightarrow \frac{P_1 V_2}{P_1 V_1} = \frac{nRT_0}{nRT_1} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_0}{T_1} < 1$$

$$\rightarrow V_2 < V_1$$

$$\rightarrow V_2 < V_1 < V_0$$

2-) Expression du travail total de compression en fonction de **m, M, T_0,** γ, α, x

La variation d'énergie interne sur toute la transformation s'écrit :

$$\Delta U_{totale} = \Delta W_{totale} + \Delta Q_{totale} = nC_{Vm}(T_3 - T_0) \qquad (3)$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = nC_{Vm}(T_3 - T_0) - \Delta Q_{totale}$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = nC_{Vm}(T_3 - T_0) - (\Delta Q_{0\to1} + \Delta Q_{1\to2} + \Delta Q_{2\to3})$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = nC_{Vm}(T_3 - T_0) - \Delta Q_{1\to2}$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = nC_{Vm}(T_3 - T_0) - nC_{Pm}(T_2 - T_1)$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_0) - \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_0 - T_1)$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}[(T_3 - T_0) - \gamma(T_0 - T_1)]$$

$$\rightarrow \Delta W_{totale} = \frac{mR}{M(\gamma - 1)}[\gamma T_1 + T_3 - (\gamma + 1)T_0] \qquad (4)$$

Il nous reste maintenant à expliciter les températures **T_1** et **T_3** en fonction de **T_0,** en exploitant les 2 processus adiabatiques.

❖ On écrit la relation de Laplace entre **0** et **1** :

$$T_0^{\gamma} P_0^{1-\gamma} = T_1^{\gamma} P_1^{1-\gamma} \rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{T_1 = T_0 (\beta)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0 x}$$

❖ On écrit la relation de Laplace entre **2** et **3** :

$$T_2^{\gamma} P_2^{1-\gamma} = T_3^{\gamma} P_3^{1-\gamma} \rightarrow T_0^{\gamma} P_1^{1-\gamma} = T_3^{\gamma} P_3^{1-\gamma}$$

$$\rightarrow T_3 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\rightarrow T_3 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \times \frac{P_0}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{T_3 = T_0 \left(\beta \times \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

On obtient ainsi l'expression du travail de compression en remplaçant **T_1** et **T_3** par leurs expressions en fonction de **T_0**, dans l'équation (4) :

$$\boldsymbol{\Delta W_{totale} = \frac{mRT_0}{M(\gamma - 1)} \left[\gamma x + \frac{(\alpha)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x} - (\gamma + 1)\right]}$$

3-) Choix de P_1 pour minimiser le travail total de compression

On recherche ici la valeur de x (resp. P_1) qui annule la dérivée de ΔW_{totale} :

$$\frac{d(\Delta W_{totale})}{dx} = 0 \rightarrow \gamma - \frac{(\alpha)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{x^2} = 0 \qquad (5)$$

Or,

$$x = (\beta)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

D'où,

$$(5) \rightarrow \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} = \frac{(\alpha)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{P_1 = P_0\left[\frac{(\alpha)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}$$