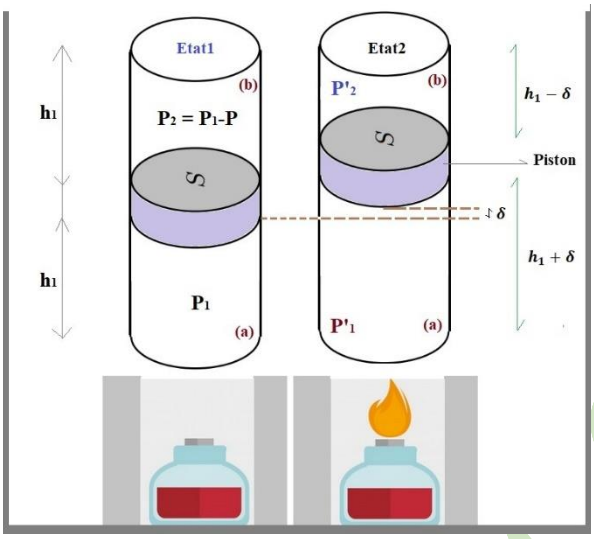
Équation d'état d'un gaz parfait et calcul de pression N°0013



1-) Déplacement du piston après un chauffage de 50°C

❖ Etat d'équilibre 1 :

La pression dans le compartiment **a** s'obtient par :

$$\boldsymbol{P_1 = P_2 + \frac{mg}{S} = P_2 + P} \;; \qquad \text{m} = \text{masse du piston}$$

$$\boldsymbol{P = \frac{mg}{S}} = \frac{136 \times 10^{-3}}{10^{-4}} \times 9{,}81 = \boldsymbol{13341{,}6\ Pa}$$

On applique la loi des gaz parfaits dans les compartiments **a** et **b** :

$$P_1V_1 = n_aRT_1 \rightarrow \boldsymbol{P_1Sh_1 = n_aRT_1} \qquad (1)$$

$$P_2V_2 = n_bRT_1 \rightarrow \boldsymbol{(P_1 - P)Sh_1 = n_bRT_1} \qquad (2)$$

❖ Etat d'équilibre 2 après chauffage à 50°C :

On applique de nouveau la loi des gaz parfaits dans les compartiments **a** et **b** :

$$P_1'V_1' = n_aRT_2 \rightarrow \boldsymbol{P'_1S(h_1 + \delta) = n_aRT_2} \qquad (3)$$

$$P_2'V_2' = n_bRT_2 \rightarrow \boldsymbol{(P'_1 - P)S(h_1 - \delta) = n_bRT_2} \qquad (4)$$

❖ Maintenant l'objectif sera de trouver à partir des équations 1, 2, 3 et 4, le déplacement : $\delta = f(P, h_1, P_1, T_1, T_2)$

$$\frac{(1)}{(3)} \quad \rightarrow \frac{P_1 S h_1}{P_1' S (h_1 + \delta)} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \boldsymbol{h_1 + \delta = \frac{P_1}{P_1'} \frac{T_2}{T_1} h_1} \qquad (5)$$

$$\frac{(2)}{(4)} \quad \rightarrow \frac{(P_1 - P) S h_1}{(P_1' - P) S (h_1 - \delta)} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \boldsymbol{h_1 - \delta = \frac{(P_1 - P)}{(P_1' - P)} \frac{T_2}{T_1} h_1} \qquad (6)$$

$$(5) \rightarrow \boldsymbol{P_1' = \frac{P_1 h_1 T_2}{T_1 (h_1 + \delta)}} \qquad \mathbf{(7)}$$

$$(7)\ dans\ \ (6) \ \ \rightarrow h_1 - \delta = \frac{(P_1 - P) T_2 h_1}{\left[\frac{P_1 h_1 T_2}{(h_1 + \delta)} - P T_1\right]}$$

$$\rightarrow (h_1 - \delta) \left[\frac{P_1 h_1 T_2}{(h_1 + \delta)} - P T_1\right] = (P_1 - P) T_2 h_1$$

$$\rightarrow h_1 \left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right) \left[\frac{P_1 h_1 T_2}{h_1 \left(1 + \frac{\delta}{h_1}\right)} - P T_1\right] = (P_1 - P) T_2 h_1$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\left[\frac{P_1}{\left(1 + \frac{\delta}{h_1}\right)} - P \frac{T_1}{T_2}\right] = \frac{(P_1 - P)}{\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)}} \qquad (8)$$

Or $\boldsymbol{\delta \ll h_1 \rightarrow \left(1 + \frac{\delta}{h_1}\right)^{-1} = 1 - \frac{\delta}{h_1}}$ $\quad \boldsymbol{et} \quad$ $\boldsymbol{\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)^{-1} = 1 + \frac{\delta}{h_1}}$ d'où :

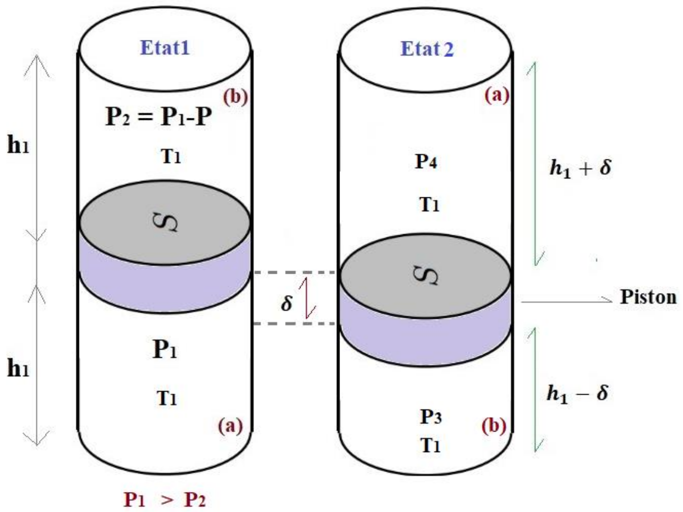
$$(8) \quad \rightarrow \quad P_1 \left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right) - P \frac{T_1}{T_2} = (P_1 - P) \left(1 + \frac{\delta}{h_1}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\delta}{h_1} (P - 2P_1) = P \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{Ph_1}}{(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{2P_1})}\left(\frac{\boldsymbol{T_1}}{\boldsymbol{T_2}} - \boldsymbol{1}\right) = \frac{\boldsymbol{Ph_1}}{(\boldsymbol{2P_1} - \boldsymbol{P})}\left(\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{T_1}}{\boldsymbol{T_2}}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\delta} = \frac{13341{,}6 \times 0{,}3}{(2 \times 133300 - 13341{,}6)} \times \left(1 - \frac{20 + 273{,}15}{50 + 273{,}15}\right) = \boldsymbol{1{,}47\ mm}$$

2-) Déplacement du piston après retournement du cylindre à iso-température



❖ Etat d'équilibre 1 :

La pression dans le compartiment **a** s'obtient par :

$$\boldsymbol{P_1 = P_2 + P}\ ;$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{S}} = \frac{136 \times 10^{-3}}{10^{-4}} \times 9{,}81 = \boldsymbol{13341{,}6\ Pa}$$

On applique la loi des gaz parfaits dans les compartiments **a** et **b** :

$$P_1V_1 = n_aRT_1 \rightarrow \boldsymbol{P_1Sh_1 = n_aRT_1} \qquad (9)$$

$$P_2V_2 = n_bRT_1 \rightarrow \boldsymbol{(P_1 - P)Sh_1 = n_bRT_1} \qquad (10)$$

❖ Etat d'équilibre 2 après retournement du cylindre :

On applique de nouveau la loi des gaz parfaits dans les compartiments **a** et **b** **(inversés)** :

$$\boldsymbol{P_3 S(h_1-\delta) = n_b R T_1} \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{P_4 S(h_1+\delta) = (P_3 - P) S(h_1+\delta) = n_a R T_1} \qquad (12)$$

- Maintenant l'objectif sera de trouver à partir des équations 9, 10, 11 et 12, le déplacement : $\delta = f(P, h_1, P_1)$

$$\frac{(10)}{(11)} \rightarrow \frac{(P_1 - P)Sh_1}{P_3 S(h_1-\delta)} = 1 \rightarrow \boldsymbol{(P_1 - P) = P_3\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)} \qquad (13)$$

$$\frac{(12)}{(9)} \rightarrow \frac{(P_3 - P)S(h_1+\delta)}{P_1 S h_1} = 1 \rightarrow (P_3 - P) = P_1\left(1 + \frac{\delta}{h_1}\right)^{-1}$$

$$\rightarrow (P_3 - P) = P_1\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{P_3 = P_1\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right) + P} \qquad (14)$$

$$(13) \quad et \quad (14) \rightarrow P_1 - P = \left[P_1\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right) + P\right]\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)$$

$$\rightarrow P_1 - P = P_1\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)^2 + P\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)$$

$$\rightarrow P_1 - P = P_1\left(1 - \frac{2\delta}{h_1}\right) + P\left(1 - \frac{\delta}{h_1}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\delta = \frac{2Ph_1}{2P_1 + P} = 30,5\ mm}$$