# Coefficients thermoélastiques N°0011

**1-)** Nommons ces coefficients et précisons leurs caractères **extensif** ou **intensif**.

Les **3** coefficients thermoélastiques : $\alpha,\ \beta\ et\ \chi_T$ sont de caractère intensif. $\alpha$ est homogène à l'inverse d'une température, c'est le coefficient de dilatation isobare ; $\beta$ est homogène à l'inverse d'une température, c'est le coefficient d'augmentation de pression isochore ; $\chi_T$ est homogène à l'inverse d'une pression, c'est le coefficient de compressibilité isotherme.

**2-)** Déterminons ces 3 coefficients pour un gaz parfait : ***PV = nRT***

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{V}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial T}}\right)_{\boldsymbol{P}} \rightarrow \alpha = \frac{1}{V}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{P}\right)\right]_P = \frac{1}{V}\left(\frac{nR}{P}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial P}}{\boldsymbol{\partial T}}\right)_{\boldsymbol{V}} \rightarrow \beta = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{nRT}{V}\right)\right]_V = \frac{1}{P}\left(\frac{nR}{V}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}}$$

$$\boldsymbol{\chi_T} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{V}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial P}}\right)_{\boldsymbol{T}} \rightarrow \chi_T = -\frac{1}{V}\left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{nRT}{P}\right)\right]_T = +\frac{1}{V}\left(\frac{nRT}{P^2}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P}}$$

**3-)** Déterminer ces 3 coefficients pour un gaz réel: $\left(\boldsymbol{P} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V^2}}\right)(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{RT}$

- **Calcul de α, pour cela dérivons l'équation ci-dessus à P constant et par rapport à T :**

$$\frac{d}{dT}\left[\left(\boldsymbol{P} + \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V^2}}\right)(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{b})\right] = \frac{d}{dT}(\boldsymbol{RT})$$

$$\rightarrow (V - b)a\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{V^2}\right) + \left(P + \frac{a}{V^2}\right)\frac{dV}{dT} = R$$

$$\rightarrow \frac{-2a(V - b)}{V^3}\frac{dV}{dT} + \left(P + \frac{a}{V^2}\right)\frac{dV}{dT} = R$$

$$\rightarrow \left[\frac{-2a(V - b) + (PV^2 + a)V}{V^3}\right]\frac{dV}{dT} = R$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{R}{\left[\frac{-2a(V-b)+(PV^2+a)V}{V^3}\right]}$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{RV^3}{-2a(V-b)+(PV^2+a)V}$$

$$\rightarrow \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} = \frac{RV^2}{-2a(V-b)+(PV^2+a)V}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{RV^2}{-2a(V-b)+(PV^2+a)V}}$$

- **Calcul de $\boldsymbol{\beta}$, pour cela dérivons l'équation ci-dessus à V constant et par rapport à T :**

$$\frac{d}{dT}\left[\left(\boldsymbol{P}+\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V^2}}\right)(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\right] = \frac{d}{dT}(\boldsymbol{RT})$$

$$\rightarrow (V-b)\frac{dP}{dT} = R$$

$$\rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{R}{(V-b)}$$

$$\rightarrow \frac{1}{P}\frac{dP}{dT} = \frac{R}{P(V-b)} = \frac{1}{T}\left(1+\frac{a}{PV^2}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{P(V-b)} = \frac{1}{T}\left(1+\frac{a}{PV^2}\right)}$$

- **Calcul de $\boldsymbol{\chi_T}$, pour cela dérivons l'équation ci-dessus à T constant et par rapport à P :**

$$\frac{d}{dP}\left[\left(\boldsymbol{P}+\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V^2}}\right)(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{b})\right] = \frac{d}{dP}(\boldsymbol{RT})$$

$$\rightarrow \frac{d}{dP}\left[\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)\right] = 0$$

$$\rightarrow (V-b)\frac{d}{dP}\left(P+\frac{a}{V^2}\right)+\left(P+\frac{a}{V^2}\right)\frac{d}{dP}(V-b)=0$$

$$\rightarrow (V-b)\left[1-\frac{2a}{V^3}\frac{dV}{dP}\right]+\left(P+\frac{a}{V^2}\right)\frac{dV}{dP}=0$$

$$\rightarrow \left(1-\frac{2a}{V^3}\frac{dV}{dP}\right)+\left[\frac{PV^2+a}{(V-b)V^2}\right]\frac{dV}{dP}=0$$

$$\rightarrow \left[\frac{2a}{V^3}-\left(\frac{PV^2+a}{(V-b)V^2}\right)\right]\frac{dV}{dP}=1$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dP}=\frac{1}{\frac{2a}{V^3}-\left(\frac{PV^2+a}{(V-b)V^2}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dP}=\frac{(V-b)V^3}{2a(V-b)-(PV^2+a)V}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}=\frac{(V-b)V^2}{-2a(V-b)+(PV^2+a)V}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\chi_T=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=\frac{(V-b)V^2}{(PV^2+a)V-2a(V-b)}}$$

**4-)** Montrons que la relation liant les coefficients thermoélastiques peut pour un gaz parfait, se mettre sous la forme : $\alpha = P\beta\chi_T$

Démonstration très facile, on part des résultats de la question 2 :

$$P\times\beta\times\ \chi_T = P\times\frac{1}{T}\times\frac{1}{P}=\frac{1}{T}=\alpha$$