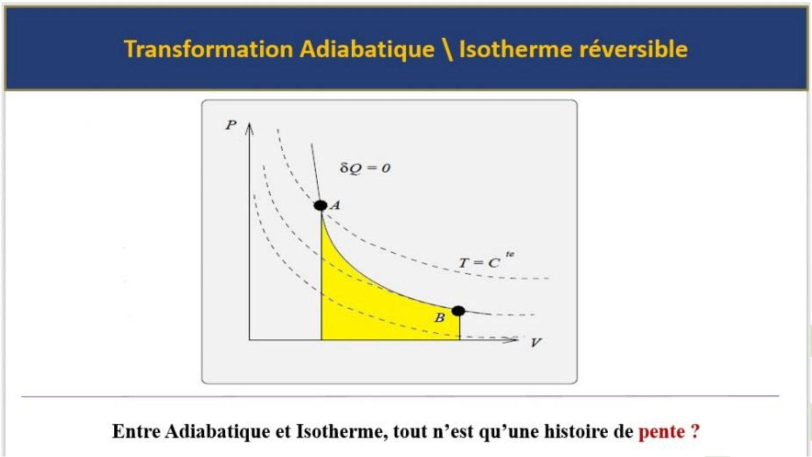
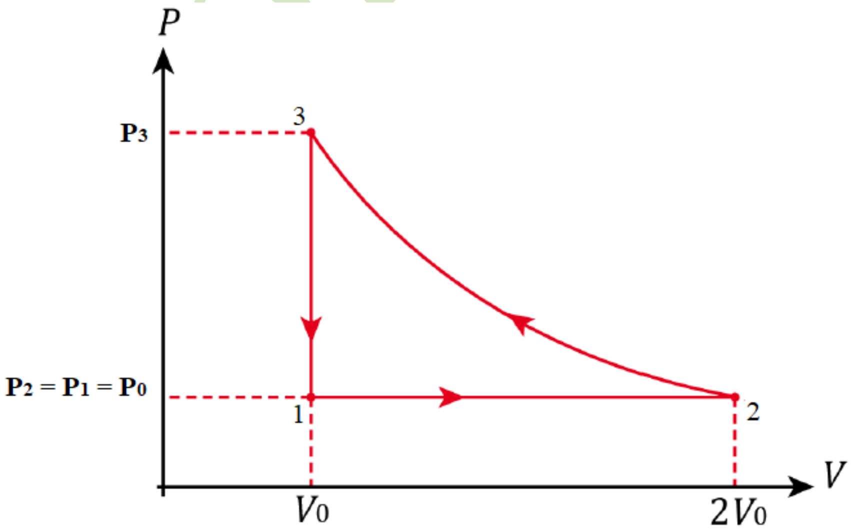
Transformation cyclique d'un gaz parfait : Compression adiabatique N°0026



1-) Représentation du cycle de transformations dans le diagramme de Clapeyron ($\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{V}$)

Rappel des différentes transformations :

- Détente isobare jusqu'au volume $\mathbf{2V_0}$
- Compression adiabatique jusqu'au volume $\mathbf{V_0}$
- Refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial



2-) Température à laquelle débute la compression adiabatique : T_2

- On supposera ici qu'à l'état initial : T_0, P_0 et V_0 sont connus. Considérons donc la détente isobare (entre 1 et 2) et écrivons la loi des gaz parfaits entre ces 2 états d'équilibre :

$$P_1V_1 = nRT_1 \qquad (1)$$

$$P_2V_2 = nRT_2 \qquad (2)$$

On fait le rapport des 2 équations :

$$\frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow T_2 = T_1 \times \frac{P_2V_2}{P_1V_1}$$

$$\rightarrow T_2 = T_0 \times \frac{P_0 2V_0}{P_0V_0}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{T_2 = 2T_0} \qquad \mathbf{(3)}$$

3-) Pression et température au point 3 en fonction de P_0, T_0 et γ

- Température T_3

On applique la loi de Laplace entre 2 et 3 :

$$TV^{\gamma-1} = Cte \rightarrow T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1} \rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}$$

$$\rightarrow \frac{T_3}{T_2} = 2^{\gamma-1}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{T_3 = 2^{\gamma}T_0} \qquad \mathbf{(4)}$$

- Pression P_3

On réécrit la relation des gaz parfaits pour la compression adiabatique (entre 2 et 3) :

$$P_2V_2 = nRT_2 \qquad (5)$$

$$P_3V_3 = nRT_3 \qquad (6)$$

$$\frac{(6)}{(5)} \rightarrow \frac{P_3V_3}{P_2V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

$$\rightarrow \frac{P_3}{P_2} = \frac{2T_3}{T_2}$$

$$\rightarrow P_3 = 2P_0 \times 2^{\gamma-1}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{P_3 = 2^{\gamma} P_0} \qquad (7)$$

4-) Travail et chaleur échangés au cours de chaque étape

- **Transformation 1 → 2 :**

  - **Travail**

$$\delta w = -PdV \rightarrow W_{1\rightarrow 2} = \int_1^2 -PdV = -P_0(V_2 - V_1) = -P_0V_0 = -nRT_0$$

$$\rightarrow \boldsymbol{W_{1\rightarrow 2} = -RT_0} \qquad (8)$$

  - **Chaleur**

$$\Delta Q = \Delta H \rightarrow Q_{1\rightarrow 2} = nC_{Pm}\Delta T$$

$$\rightarrow Q_{1\rightarrow 2} = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$$

$$\rightarrow Q_{1\rightarrow 2} = \frac{5}{2}R(2T_0 - T_0)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{Q_{1\rightarrow 2} = \frac{5}{2}RT_0} \qquad (9)$$

- **Transformation 2 → 3 :**

  - **Travail**

$$\delta w = dU$$

$$\rightarrow W_{2\rightarrow 3} = nC_{Vm}(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}R(\boldsymbol{2^{\gamma}T_0 - 2T_0})$$

$$\rightarrow \boldsymbol{W_{2\rightarrow 3} = \frac{3}{2}RT_0(2^{\gamma} - 2)} \qquad (10)$$

  - **Chaleur**

$$\boldsymbol{Q_{2\rightarrow 3} = 0} \qquad \text{Car adiabatique} \qquad (11)$$

- **Transformation 3 → 1 :**

  - **Travail**

$$W_{3\to1} = 0 \qquad \text{Car isochore} \quad (12)$$

  - **Chaleur**

$$Q_{3\to1} = nC_{Vm}(T_1 - T_3) = C_{Vm}(T_1 - T_3)$$

$$\to Q_{3\to1} = C_{Vm}(T_1 - T_3)$$

$$\to Q_{3\to1} = \frac{3}{2}R(T_0 - 2^{\gamma}T_0)$$

$$\to Q_{3\to1} = \frac{3}{2}RT_0(1 - 2^{\gamma}) \qquad (13)$$

5-) Ecriture du premier principe de la Thermodynamique

Théoriquement pour un cycle fonctionnant de manière réversible, le premier principe s'écrit :

$$\Delta U_{cycle} = \Delta Q_{cycle} + \Delta W_{cycle} = 0$$

$$\Delta Q_{cycle} = \sum_{1}^{3} Q_i = Q_{1\to2} + Q_{2\to3} + Q_{3\to1} = 4RT_0 - 3RT_0 \times 2^{\gamma-1}$$

$$\Delta W_{cycle} = \sum_{1}^{3} W_i = W_{1\to2} + W_{2\to3} + W_{3\to1} = -4RT_0 + 3RT_0 \times 2^{\gamma-1}$$

On a bien :

$$\Delta U_{cycle} = \sum_{1}^{3} Q_i + \sum_{1}^{3} W_i = 0$$

6-) Comparaison des pentes isotherme/adiabatique :

- La pente d'une transformation adiabatique est beaucoup plus raide que la pente de la même transformation si elle était isotherme.
- Référez-vous à la figure de l'énoncé en ce qui concerne les visualisations.