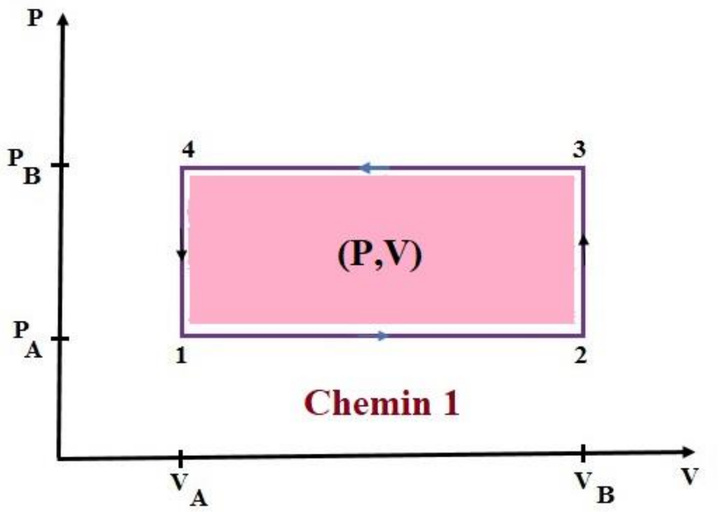
Transformations cycliques, Chemins Thermodynamiques, Fonction d'État N°0028

1-) Calcul du travail et de la quantité de chaleur reçus par le gaz au cours du cycle

- **Chemin 1**



- **De 1 → 2 : Isobare**

$$\Delta W_{12} = \int_1^2 -PdV = -P_1(V_2 - V_1) = -P_A(V_B - V_A)$$

$$\Delta Q_{12} = \int_1^2 nC_{Pm}dT = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

$$\rightarrow \Delta Q_{12} = \frac{\gamma P_1}{\gamma - 1}(V_2 - V_1) = \frac{\gamma P_A}{\gamma - 1}(V_B - V_A)$$

- **De 2 → 3 : Isochore**

$$\Delta W_{23} = 0$$

$$\Delta Q_{23} = \int_2^3 nC_{Vm}dT = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$$

$$\rightarrow \Delta Q_{23} = \frac{V_2}{\gamma - 1}(P_3 - P_2) = \frac{V_B}{\gamma - 1}(P_B - P_A)$$

- **De 3 → 4 : Isobare**

$$\Delta W_{34} = \int_3^4 -PdV = -P_3(V_4 - V_3) = -P_B(V_A - V_B)$$

$$\Delta Q_{34} = \int_3^4 nC_{Pm}dT = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_4 - T_3)$$

$$\rightarrow \Delta Q_{34} = \frac{\gamma P_3}{\gamma - 1}(V_4 - V_3) = \frac{\gamma P_B}{\gamma - 1}(V_A - V_B)$$

- **De 4 → 1 : Isochore**

$$\Delta W_{41} = 0$$

$$\Delta Q_{41} = \int_4^1 nC_{Vm}dT = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$$

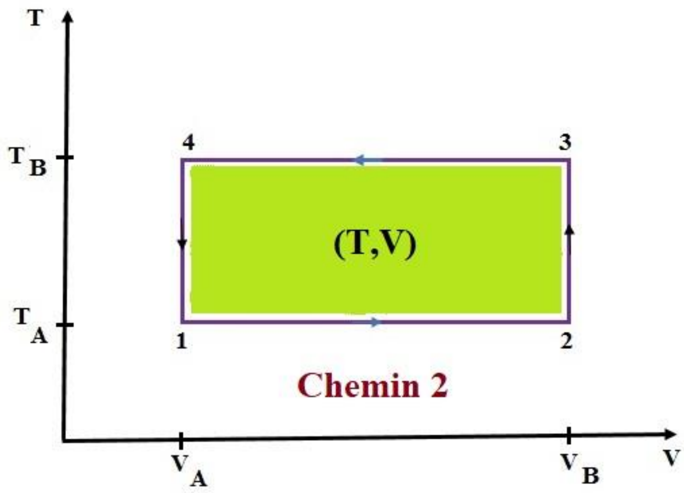
$$\rightarrow \Delta Q_{41} = \frac{V_1}{\gamma - 1}(P_1 - P_4) = \frac{V_A}{\gamma - 1}(P_A - P_B)$$

- **Bilan pour le cycle**

$$\Delta W_{Cycle1} = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41} = (V_B - V_A)(P_B - P_A)$$

$$\Delta Q_{Cycle1} = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23} + \Delta Q_{34} + \Delta Q_{41} = (V_A - V_B)(P_B - P_A)$$

❖ **Chemin 2**



➢ **De 1 → 2 : Isotherme**

$$\Delta W_{12} = \int_1^2 -PdV = \int_1^2 -nRT\frac{dV}{V} = -nRT_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\rightarrow \Delta W_{12} = -nRT_A ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

- La transformation étant isotherme, $\Delta U = 0 \rightarrow \Delta Q = -\Delta W$

$$\Delta Q_{12} = -\Delta W_{12} = nRT_A ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

➢ **De 2 → 3 : Isochore**

$$\Delta W_{23} = 0$$

$$\Delta Q_{23} = \int_2^3 nC_{Vm}dT = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$$

$$\rightarrow \Delta Q_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A)$$

- **De 3 → 4 : Isotherme**

$$\Delta W_{34} = \int_3^4 -PdV = \int_3^4 -nRT\frac{dV}{V} = -nRT_B ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$\rightarrow \Delta W_{34} = -nRT_B ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

- La transformation étant isotherme, $\Delta U = 0 \rightarrow \Delta Q = -\Delta W$

$$\Delta Q_{34} = -\Delta W_{34} = nRT_B ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

- **De 4 → 1 : Isochore**

$$\Delta W_{41} = 0$$

$$\Delta Q_{41} = \int_4^1 nC_{Vm}dT = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$$

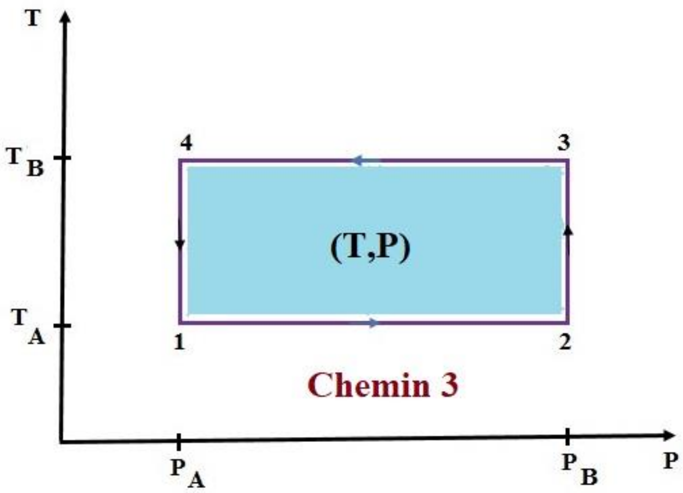
$$\rightarrow \Delta Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_B)$$

- **Bilan pour le cycle**

$$\Delta W_{Cycle2} = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41} = nR(T_B - T_A)ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta Q_{Cycle2} = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23} + \Delta Q_{34} + \Delta Q_{41} = nR(T_B - T_A)ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

❖ Chemin 3



➢ De 1 → 2 : Isotherme

$$\Delta W_{12} = \int_1^2 -PdV = \int_1^2 -nRT\frac{dV}{V} = -nRT_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\rightarrow \Delta W_{12} = -nRT_A ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

- Or, la transformation étant isotherme,

$$PV = nRT = Cte \rightarrow PdV + VdP = 0 \rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$\rightarrow \int_A^B \frac{dV}{V} = -\int_A^B \frac{dP}{P} \rightarrow ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

D'où,

$$\rightarrow \Delta W_{12} = +nRT_A ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

- Ici aussi isotherme→ $\Delta U = 0 \rightarrow \Delta Q = -\Delta W$

$$\rightarrow \Delta Q_{12} = -\Delta W_{12} = -nRT_A ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

- **De 2 → 3 : Isobare**

$$\Delta W_{23} = \int_2^3 -PdV = -P_2(V_3 - V_2) = -nR(T_3 - T_2)$$

$$\rightarrow \Delta W_{23} = -nR(T_B - T_A)$$

$$\Delta Q_{23} = \int_2^3 nC_{Pm}dT = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$$

$$\rightarrow \Delta Q_{23} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_B - T_A)$$

- **De 3 → 4 : Isotherme**

Raisonnement identique à 1→2 :

$$\rightarrow \Delta W_{34} = +nRT_B ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right)$$

$$\Delta Q_{34} = -\Delta W_{34} = -nRT_B ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right)$$

- **De 4 → 1 : Isobare**

$$\Delta W_{41} = \int_4^1 -PdV = -P_1(V_1 - V_4) = -nR(T_1 - T_4)$$

$$\rightarrow \Delta W_{41} = -nR(T_A - T_B)$$

$$\Delta Q_{41} = \int_4^1 nC_{Pm}dT = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$$

$$\rightarrow \Delta Q_{41} = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1}(T_A - T_B)$$

- **Bilan pour le cycle**

$$\Delta W_{Cycle3} = \Delta W_{12} + \Delta W_{23} + \Delta W_{34} + \Delta W_{41} = nR(T_A - T_B)ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

$$\Delta Q_{Cycle3} = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23} + \Delta Q_{34} + \Delta Q_{41} = nR(T_B - T_A)ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

2-) Vérifions que ni le travail, ni la quantité de chaleur n'est une fonction d'état

Il est très facile de voir qu'en fonction des chemins suivis, les différents travaux du cycle ne sont pas identiques. Idem pour les quantités de chaleur :

$$\Delta W_{Cycle1} \neq \Delta W_{Cycle2} \neq \Delta W_{Cycle3}$$

$$\Delta Q_{Cycle1} \neq \Delta Q_{Cycle2} \neq \Delta Q_{Cycle3}$$

Conclusion : chaleur et travail ne sont pas des fonctions d'état, ils dépendent du chemin suivi pour parcourir le cycle.

3-) Vérifions que l'énergie interne est une fonction d'état

Si on pose :

$$\Delta U_{cycle1} = \Delta W_{Cycle1} + \Delta Q_{Cycle1} = 0$$

$$\Delta U_{cycle2} = \Delta W_{Cycle2} + \Delta Q_{Cycle2} = 0$$

$$\Delta U_{cycle3} = \Delta W_{Cycle3} + \Delta Q_{Cycle3} = 0$$

Conclusion : On démontre facilement que, quel que soit le chemin parcouru, la variation d'énergie interne est identique (égale à 0 ici). L'énergie interne ne dépend pas du chemin suivi, donc c'est une fonction d'état.

4-) Vérifions que la variation d'énergie interne est nulle sur les isothermes

A partir du Premier Principe de la Thermodynamique, $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$. Dans cette relation, ΔW se calcule aisément à partir d'un calcul d'aire cependant, pour déterminer ΔQ on pourrait avoir le choix d'utiliser l'un des 2 modèles ci-dessous :

$$\delta Q = dU - \delta W = nC_{Vm}dT + PdV \qquad (1)$$

$$\delta Q = dH - VdP = nC_{Pm}dT - VdP \qquad (2)$$

L'équation (1) découle du Premier Principe, c'est elle qui a été privilégiée pour répondre à toutes les questions précédentes. Il est donc trivial que pour une transformation isotherme, (1) $\rightarrow \Delta U = \Delta W + \Delta Q = 0$.

Pour répondre convenablement à la question (4), nous allons **recalculer ΔQ** à partir de la relation (2). Ensuite nous vérifierons que pour un processus isotherme quel qu'il soit, $\Delta U = \Delta W + \Delta Q = 0$.

A partir de l'équation (2),

$$\delta Q = nC_{Pm}dT - VdP \rightarrow \delta Q = -VdP \qquad \text{le long d'une isotherme}$$

$$\rightarrow \delta Q = -VdP = -nRT\frac{dP}{P} \rightarrow \Delta Q = -nRT\int_i^f \frac{dP}{P}$$

- Or, pour une transformation isotherme d'un gaz parfait,

$$PV = nRT = Cte \rightarrow PdV + VdP = 0 \rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P}$$

$$\rightarrow \int_i^f \frac{dV}{V} = -\int_i^f \frac{dP}{P} \rightarrow ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

D'où,

$$\rightarrow \Delta Q = -nRTln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) = +nRTln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Maintenant, considérons par exemple le processus isotherme **3→4 du Chemin 2** :

$$\Delta U_{34} = \Delta W_{34} + \Delta Q_{34} = -nRT_B ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) + nRT_B ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 0$$