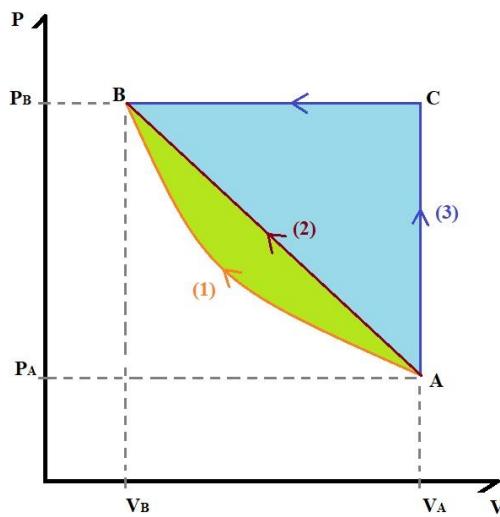


Transformations adiabatique, linéaire, isochore ou isobare d'un gaz parfait N°0150



1-) Loi des gaz parfaits pour la transformation (1)

La loi d'état des gaz parfaits s'écrit :

$$PV = nRT \quad (1)$$

Pour la transformation (1) isotherme, l'application de l'équation 1 donne :

$$P_A V_A = nRT_A \rightarrow \frac{P_A V_A}{T_A} = nR = Cte \quad (2)$$

$$P_B V_B = nRT_B \rightarrow \frac{P_B V_B}{T_B} = nR = Cte \quad (3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \rightarrow \frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \rightarrow P_A V_A = P_B V_B \rightarrow V_A = 3V_B \quad (4)$$

2-) Travail mis en jeu pour la transformation (1) en fonction de T_A et R

- ❖ Travail correspondant à la compression isotherme

$$\Delta W_1 = \int_A^B -PdV = \int_A^B -nRT \frac{dV}{V} = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\rightarrow \Delta W_1 = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -2RT_A \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 2RT_A \ln(3) \quad (5)$$

3-) Travail mis en jeu pour la transformation (2) en fonction de T_A et R

- Sur la transformation (2), on a une compression linéaire, on commence donc par déterminer l'équation de la droite : $P = \beta V + \beta_0$

$$P_A = \beta V_A + \beta_0 \quad (6)$$

$$P_B = \beta V_B + \beta_0 \quad (7)$$

La résolution du système d'équation (6) et (7) conduit à :

$$\beta = \frac{P_B - P_A}{V_B - V_A} \quad \text{et} \quad \beta_0 = \frac{P_A V_B - P_B V_A}{V_B - V_A}$$

D'où l'équation de la compression linéaire :

$$P = \frac{P_B - P_A}{V_B - V_A} V + \frac{P_A V_B - P_B V_A}{V_B - V_A}$$

- ❖ Travail correspondant à la compression linéaire

$$\Delta W_2 = \int_A^B -PdV$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \int_A^B (\beta V + \beta_0) dV$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\left(\frac{1}{2} \beta V^2 + \beta_0 V \right)_B - \left(\frac{1}{2} \beta V^2 + \beta_0 V \right)_A \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\frac{1}{2} \beta (V_B^2 - V_A^2) + \beta_0 (V_B - V_A) \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{P_B - P_A}{V_B - V_A} \right) (V_B^2 - V_A^2) + \left(\frac{P_A V_B - P_B V_A}{V_B - V_A} \right) (V_B - V_A) \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\frac{1}{2} \frac{(P_B - P_A)(V_B - V_A)(V_B + V_A)}{(V_B - V_A)} + \left(\frac{P_A V_B - P_B V_A}{V_B - V_A} \right) (V_B - V_A) \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\frac{1}{2} (P_B - P_A)(V_B + V_A) + (P_A V_B - P_B V_A) \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\frac{1}{2} (3P_A - P_B) \left(\frac{1}{3} V_A + V_A \right) + (P_A \frac{1}{3} V_A - 3P_A V_A) \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = - \left[\frac{4}{3} P_A V_A - \frac{8}{3} P_A V_A \right]$$

$$\rightarrow \Delta W_2 = \frac{4}{3} P_A V_A = \frac{4}{3} (nRT_A) = \frac{4}{3} (2RT_A) = \frac{8}{3} RT_A \quad (8)$$

4-) Travail mis en jeu pour la transformation (3) en fonction de T_A et R

❖ Travail correspondant à la compression isochore puis isobare

$$\Delta W_3 = \int_A^C \delta W + \int_C^B \delta W$$

$$\rightarrow \Delta W_3 = 0 + \int_C^B -PdV = -P_B(V_B - V_C) = -P_B(V_B - V_A)$$

$$\rightarrow \Delta W_3 = -P_B(V_B - 3V_B) = +2P_B V_B = 2nR\textcolor{red}{T}_B = 4R\textcolor{red}{T}_B$$

$$\rightarrow \Delta W_3 = 4RT_A \quad (9)$$

5-) Expression du Premier Principe de la Thermodynamique

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q \quad (10)$$

❖ **U = Fonction d'état → U est indépendant du chemin suivi**

6-) Variation d'énergie interne pour toutes les transformations

La transformation (1) étant isotherme, d'après la 1^{ère} loi de Joule pour un gaz parfait :

$dU = nC_V dT$, ainsi :

$$\Delta U_1 = 0 \quad (11)$$

Or les points de départ et d'arrivée étant identiques pour les 3 transformations :

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = \Delta U_3 = 0 \quad (12)$$

7-) Quantités de chaleur échangées au cours de chacune des 3 transformations

$$\Delta U_{1,2,3} = 0 \rightarrow \Delta Q = -\Delta W$$

Ainsi,

$$\Delta Q_1 = -\Delta W_1 = -2RT_A \ln(3) \quad (13)$$

$$\Delta Q_2 = -\Delta W_2 = -\frac{8}{3}RT_A \quad (14)$$

$$\Delta Q_3 = -\Delta W_3 = -4RT_A \quad (15)$$

8-) Voyons s'il est possible de faire évoluer le système de A vers B en suivant un processus adiabatique

Pour cela, il faudrait vérifier la Loi de Laplace :

$$P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^\gamma \rightarrow \text{Impossible car } \gamma = \frac{7}{5}$$

Donc il serait impossible de faire évoluer le système de A vers B en suivant un processus adiabatique.

9-) Chaleur échangée dans le cas de la transformation entre B et C en fonction de R et T_A

La transformation C → B étant isobare (dP = 0) on part de l'expression de l'enthalpie :

$$H = U + PV$$

$$\rightarrow dH = dU + PdV + VdP$$

$$\rightarrow dH = \delta Q + \delta W + PdV + VdP$$

$$\rightarrow dH = \delta Q - PdV + PdV + VdP$$

$$\rightarrow dH = \delta Q + VdP$$

$$\rightarrow dH = \delta Q \quad (17)$$

D'après la 2^e loi de Joule :

$$dH = nC_{Vm}dT \rightarrow \delta Q = nC_{Vm}dT$$

$$\rightarrow \delta Q = n \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT$$

Or, $n = 2$ et $\gamma = 7/5$

$$\rightarrow \delta Q = 7RdT$$

$$\rightarrow \Delta Q_{CB} = 7R \int_C^B dT = 7R(T_B - T_C) = 7R(T_A - T_C) \quad (18)$$

❖ Relation entre T_A et T_C

On applique la loi d'état des gaz parfaits entre A et C :

$$\begin{aligned} \frac{P_A V_A}{T_A} &= \frac{P_C V_C}{T_C} \rightarrow \frac{P_A}{P_C} = \frac{T_A}{T_C} \\ \rightarrow \frac{T_A}{T_C} &= \frac{P_A}{P_B} = \frac{1}{3} \rightarrow T_C = 3T_A \end{aligned} \quad (19)$$

$$(19) \text{ dans } (18) \rightarrow \Delta Q_{CB} = -14RT_A$$

10- Si la transformation (1) devenait monotherme, on pourra toujours considérer la transformation comme étant réversible.

Concernant l'énergie interne, c'est une fonction d'état, donc indépendante du chemin suivi, mais seulement de l'état final et initial. Or la transformation étant monotherme, $T_A = T_B$. Ainsi d'après la 1^{ère} loi de Joule :

$$\Delta U = nC_{Vm}(T_B - T_A) = 0$$